Airy 関数の Stokes 現象

Takayuki Suzuki

Abstract — Airy 関数の Stokes 現象に関するノート [1]

Contents

1. 完全 WKB 解析から見た Airy 関数の Stokes 現象

1.1. WKB 解の構築

Airy 方程式を考える．

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\eta^2 x\right)\psi(x,\eta)=0 \tag{1}$$

ここで，実パラメータ η が十分大きい際の，解の振る舞いについて考えていく．

WKB 解

$$\psi(x,\eta)=\exp\left(\int^x S(x,\eta)dx\right) \tag{2}$$

$$S(x,\eta)=\eta S_{-1}(x)+S_0(x)+\eta^{-1}S_1(x)+\cdots$$

は η が十分大きいとき，十分良い近似解となると考えられる．WKB 解を (1) に代入すると，$S(x,\eta)$ は Riccati 方程式

$$S^2(x,\eta)+\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial x}=\eta^2 x \tag{3}$$

を満たす．さらに，各項は

$$S_{-1}^2(x)=x,$$

$$\sum_{j=-1}^{n+1}S_j(x)S_{n-j}(x)+\frac{dS_n(x)}{dx}=0 \quad (n\geq -1)$$

を満たす．

Proof. 後者について示す．

$$\left(\sum_{j=-1}^{\infty}\eta^{-j}S_j(x)\right)^2+\sum_{j=-1}^{\infty}\eta^{-j}\frac{dS_j(x)}{dx}=\eta^2 x$$

η の次数が $-n(\leq 1)$ のものを考えると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=-1}^{\infty}\sum_{k=-1}^{\infty}\delta_{j+k,n}\eta^{-j-k}S_j(x)S_k(x)+\eta^{-n}\frac{dS_n(x)}{dx}=0\\ \sum_{j=-1}^{n+1}S_j(x)S_{n-j}(x)+\frac{dS_n(x)}{dx}=0\end{aligned}$$

となる． □

これより，$S(x,\eta)$ は 2 つ得られ，

$$\begin{aligned}S^{(\pm)}(x,\eta)&=\eta S_{-1}^{(\pm)}(x)+S_0^{(\pm)}(x)+\eta^{-1}S_1^{(\pm)}(x)+\cdots\\&=\sum_{n=-1}^{\infty}(\pm1)^n\eta^{-n}c_n x^{-1-\frac{3}{2}n}\end{aligned}$$

と表される．ここで，

$$\begin{aligned}c_{-1}&=1\\c_0&=\frac{-1}{4}\\c_1&=\frac{-5}{32}\end{aligned}$$

である．さらに，

$$\begin{aligned}S^{(\pm)}(x,\eta)&=\pm S_{\mathrm{odd}}(x,\eta)+S_{\mathrm{even}}\,(x,\eta)\\S_{\mathrm{odd}}(x,\eta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-2n+1}S_{2n-1}^{(+)}(x)\\S_{\mathrm{even}}(x,\eta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-2n}S_{2n}^{(+)}(x)\end{aligned}$$

のように表すと，Riccati 方程式 (3) より

$$S_{\mathrm{even}}\,(x,\eta)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log S_{\mathrm{odd}}\,(x,\eta)$$

が成り立つことが分かる．よって，WKB 解 (2) は

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(x,\eta)&=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}(x,\eta)}}\exp\left(\pm\int_{x_0}^{x}S_{\mathrm{odd}}(x',\eta)dx'\right)\\&=e^{\pm\xi_0(x)\eta}\sum_{n=0}^{\infty}d_{\pm,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}\eta^{-n-1}\end{aligned}\tag{4}$$

と表せる [1]．ここで，

$$\xi_0(x):=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\quad x_0=0$$

[1] 後の計算で見るように，$\eta^{-\frac{1}{2}}$ を加えた．

と置いた．これを Airy 方程式 (1) に代入すると，

$$d_{\pm,n} = \frac{1}{2\pi}\left(\pm\frac{3}{4}\right)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}{n!} \tag{5}$$

を得る．ちなみに，

$$\begin{aligned} d_{\pm,0} &= 1 \\ d_{\pm,1} &= \pm\frac{5}{48} \\ d_{\pm,2} &= \frac{385}{4608} \end{aligned}$$

となる．

Proof. まず，(4) を示す．

$$S_{\mathrm{odd}}(x,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-2n+1} c_{2n-1} x^{\frac{1}{2}-3n}$$

より，

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(x,\eta) &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-2n+1}c_{2n-1}x^{\frac{1}{2}-3n}}}\exp\left(\pm\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-2n+1}c_{2n-1}x'^{\frac{1}{2}-3n}dx'\right) \\ &= \frac{e^{\pm\eta\frac{2}{3}x^{2/3}}}{\sqrt{\eta}x^{\frac{1}{4}}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\eta^{-2}x^{-3}\right)^n\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\pm\eta x^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\eta^{-2}x^{-3}\right)^n\right) \\ &= \frac{e^{\pm\eta\frac{2}{3}x^{2/3}}}{\sqrt{\eta}x^{\frac{1}{4}}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n\left(\eta^{-2}x^{-3}\right)^n\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_{n,\pm}\left(\eta^{-1}x^{-\frac{3}{2}}\right)^n\right) \\ &= e^{\pm\eta\frac{2}{3}x^{2/3}}\eta^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}d_{\pm,n}\left(\eta^{-1}x^{-\frac{3}{2}}\right)^n \\ &= e^{\pm\frac{2}{3}\eta x^{\frac{3}{2}}}\eta^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{2}\eta^{-2}c_1x^{-3}+\cdots\right)\left(1\mp\eta^{-1}c_1\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\eta^{-2}c_1^2\frac{4}{9}x^{-3}+\cdots\right) \\ &= e^{\pm\frac{2}{3}\eta x^{\frac{3}{2}}}\eta^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}\left(1\mp\eta^{-1}c_1\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+\eta^{-2}c_1^2\frac{2}{9}x^{-3}-\frac{1}{2}\eta^{-2}c_1x^{-3}+\cdots\right) \end{aligned}$$

となり，全体に $\eta^{-\frac{1}{2}}$ をかけることにより (4) を得る．また，これを (1) に代入すると，

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\eta^2x\right)\left(e^{\pm\xi_0(x)\eta}\sum_{n=0}^{\infty}d_{\pm,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}\eta^{-n-1}\right)=0 \\ &\mp\xi_0''(x)\sum_{n=1}^{\infty}d_{\pm,n-1}x^{-\frac{3}{2}(n-1)-\frac{1}{4}}\eta^{-n+1}-\xi_0'^2(x)\sum_{n=0}^{\infty}d_{\pm,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}\eta^{-n+1} \\ &\quad\mp2\xi_0'(x)\sum_{n=1}^{\infty}d_{\pm,n-1}\left(-\frac{3}{2}(n-1)-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{3}{2}(n-1)-\frac{5}{4}}\eta^{-n+1} \\ &\quad-\sum_{n=2}^{\infty}d_{\pm,n-2}\left(-\frac{3}{2}(n-2)-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}(n-2)-\frac{5}{4}\right)x^{-\frac{3}{2}(n-2)-\frac{9}{4}}\eta^{-n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}d_{\pm,n}x^{-\frac{3}{2}n+\frac{3}{4}}\eta^{-n+1}=0 \end{aligned}$$

となる．以上より，η^1,η^0 の項はそれぞれ

$$\begin{aligned} &-\xi_0'^2(x)d_{\pm,0}x^{-\frac{1}{4}}+d_{\pm,0}x^{\frac{3}{4}}=0 \\ &d_{\pm,1}x^{-\frac{3}{4}}-\xi_0'^2(x)d_{\pm,1}x^{-\frac{7}{4}}=0=\pm\xi_0''(x)d_{\pm,0}x^{-\frac{1}{4}}\mp\frac{1}{2}\xi_0'(x)d_{\pm,0}x^{-\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

と恒等式となっていることが分かる．$n \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\mp d_{\pm,n-1} &= d_{\pm,n-2} \frac{1}{3(1-n)} \left(-\frac{3}{2}n + \frac{11}{4} \right) \left(-\frac{3}{2}n + \frac{7}{4} \right) \\
d_{\pm,n} &= \frac{c_\pm \left(\pm\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{7}{6}\right)_{n-1} \left(\frac{11}{6}\right)_{n-1}}{\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{c_\pm \left(\pm\frac{3}{4}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+n\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \\
&= \frac{c_\pm \left(\pm\frac{3}{4}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+n\right)}{\Gamma(n+1)} \frac{18}{5\pi}
\end{aligned}
$$

と求まる [2]．さらに，$d_{\pm,2} = \frac{2}{9}c_1^2 - \frac{1}{2}c_1 = \frac{385}{4608}$ より，

$$
\begin{aligned}
d_{\pm,2} &= \pm c_\pm \Gamma\left(\frac{13}{6}\right)\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\frac{27}{20\pi} \\
&= \pm c_\pm \frac{385\pi}{648}\frac{27}{20\pi} \\
&= \pm c_\pm \frac{77}{96} \\
c_\pm &= \pm\frac{5}{48} \\
d_{\pm,n} &= \pm \frac{\left(\pm\frac{3}{4}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+n\right)}{\Gamma(n+1)} \frac{3}{8\pi}
\end{aligned}
$$

となり，(5) が求まる．また，$d_{\pm,0} = 1$，$d_{\pm,1} = \mp\frac{2}{3}c_1 = \pm\frac{5}{48}$ より，$n = 0, 1$ の場合もこれを満たす． □

1.2. Borel 変換・Borel 和

前節では，η による無限級数の形で WKB 解を表現した．しかし，WKB 解は一般に漸近級数であることが知られている．このような漸近級数に対して意味を持たせるものが，次の Borel 変換と Borel 和である．

[2] **Theorem A.3** より，

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) &= \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(3-\frac{7}{6}\right) \\
&= \left(2-\frac{7}{6}\right)\left(1-\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{7}{6}\right) \\
&= \frac{5}{6}\frac{-1}{6}\frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{7}{6}\right)}
\end{aligned}
$$

Definition 1.1: Borel 変換

無限級数

$$f(\eta)=e^{\xi_0\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-n-\alpha}f_n \quad (\alpha\in\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\})$$

に対し，

$$f_B(\xi):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)}(\xi+\xi_0)^{n+\alpha-1} \tag{6}$$

を Borel 変換と呼ぶ．

Definition 1.2: Borel 和

Borel 変換 $f_B(\xi)$ に対し，

$$F(\eta)=\int_{-\xi_0}^{\infty}e^{-\eta\xi}f_B(\xi)d\xi \tag{7}$$

を Borel 和と呼ぶ．ただし，積分路は図のようにとる．

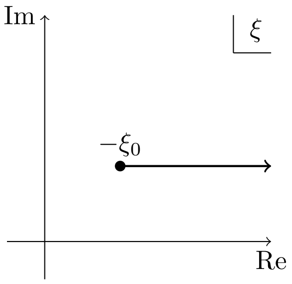

Figure 1: 積分経路

Remark: 積分と無限和が可換であれば，(6) と (7) より

$$\begin{aligned}F(\eta)&=\int_{-\xi_0}^{\infty}e^{-\eta\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)}(\xi+\xi_0)^{n+\alpha-1}d\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\xi_0}^{\infty}e^{-\eta\xi}\frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)}(\xi+\xi_0)^{n+\alpha-1}d\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}f_ne^{\eta\xi_0}\eta^{-n-\alpha}=f(\eta)\end{aligned}$$

となり，これらの操作の前後で級数は不変である．

以上の定義より，WKB 解 (4) に対する Borel 変換 (6) は以下のようになる．

$$\psi_{\pm,B}(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_{\pm,n}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}\left(\xi\pm\xi_0(x)\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

ここで，係数 $d_{\pm,n}$(5) を代入すると，次のように超幾何関数を用いて表すことができる．

$$\psi_{+,B}(x,\xi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}\frac{1}{x}} s^{-\frac{1}{2}}(\xi) F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};s(\xi)\right), \tag{8}$$

$$\psi_{-,B}(x,\xi) = \sqrt{-\frac{3}{4\pi}\frac{1}{x}} (1-s(\xi))^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};1-s(\xi)\right) \tag{9}$$

$$s(\xi) := \frac{3\xi}{4x^{3/2}} + \frac{1}{2}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\psi_{+,B}(x,\xi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+n\right)}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}} \left(\xi+\xi_0(x)\right)^{n-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{2\pi} x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+n\right)}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\xi}{2\xi_0(x)}+\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{2\pi} x^{-1} s^{-\frac{1}{2}}(\xi) \frac{\pi}{\sqrt{\pi}\sin\frac{\pi}{6}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{n!\left(\frac{1}{2}\right)_n} s^n(\xi) \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} x^{-1} s^{-\frac{1}{2}}(\xi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2},s(\xi)\right)
\end{aligned}$$

より，式 (8) が求まる．また，

$$\begin{aligned}
\psi_{-,B}(x,\xi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n \Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+n\right)}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}} \left(\xi-\xi_0(x)\right)^{n-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{-\frac{3}{4}}\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+n\right)}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} x^{-1} \left(-\frac{\xi}{2\xi_0(x)}+\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

より，式 (9) が求まる． □

$\psi_{+,B}(x,\xi)$ は $s(\xi)=1$ において，$\psi_{-,B}(x,\xi)$ は $s(\xi)=0$ において発散する．ここで，

$$s(\xi)=0,1 \Longleftrightarrow \xi = -\frac{2}{3}x^{3/2}, \frac{2}{3}x^{3/2} = -\xi_0(x), \xi_0(x)$$

である．$\psi_{+,B}(x,\xi)$ について Borel 和を考えると，

$$\begin{aligned}
\Psi_+(x,\eta) &:= \int_{-\xi_0(x)}^{\infty} e^{-\eta\xi}\psi_{+,B}(x,\xi)d\xi \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}\frac{1}{x}} \int_{-\xi_0(x)}^{\infty} e^{-\eta\xi} s^{-\frac{1}{2}}(\xi) F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};s(\xi)\right) d\xi
\end{aligned}$$

と表せる．$s(\xi)=1$ の時に発散することに注意すると，$\mathrm{Im}\, x^{3/2}=0$ において積分経路上に特異点が存在することとなる (図 1.2)．今考えている $\psi_{+,B}$ の場合，$-\mathrm{Im}\,\xi_0(x)>0$ から $-\mathrm{Im}\,\xi_0(x)<0$ になる場合，つまり図 4 の領域 I から領域 II に解析接続する場合に特異点を避けた経路を取る必要がある．つまり

$$\Psi_+^{(\mathrm{I})}(x,\eta) = \Psi_+^{(\mathrm{II})}(x,\eta) + \int_\gamma e^{-\eta\xi}\psi_{+,B}(x,\xi)d\xi$$

といった関係式が成り立つ．これを接続の意味を込めて

$$\Psi_+(x,\eta) \to \Psi_+(x,\eta) + \int_\gamma e^{-\eta\xi}\psi_{+,B}(x,\xi)d\xi \quad (\mathrm{I}\to\mathrm{II})$$

と表すことにする．

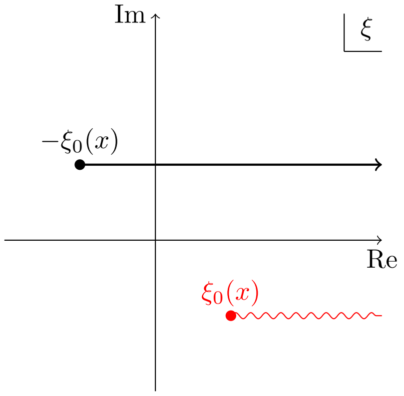

Figure 2: $-\operatorname{Im}\xi_0(x) > \operatorname{Im}\xi_0(x)$

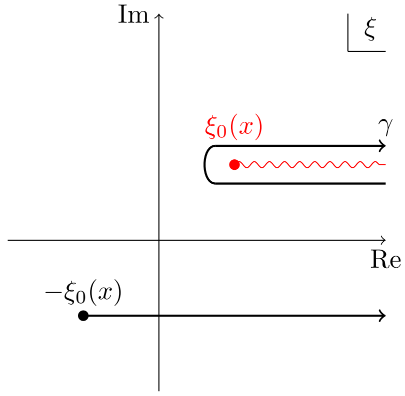

Figure 3: $-\operatorname{Im}\xi_0(x) < \operatorname{Im}\xi_0(x)$

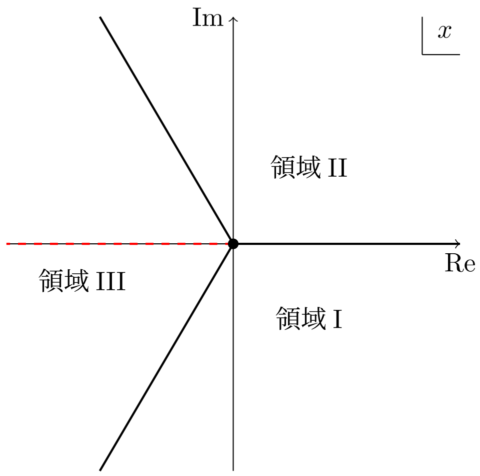

Figure 4: Airy 方程式の Stokes 曲線．cut は負の実軸上に入れることにする．

さて，**Theorem** B.3 より，

$$F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};s(\xi)\right)$$
$$=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}(1-s(\xi))^{-1/2}s^{1/2}(\xi)F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};1-s(\xi)\right)+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{3}{2};1-s(\xi)\right)$$

が成り立つ．ここで，右辺第 2 項が $s(\xi)=1 \Leftrightarrow \xi=\xi_0(x)$ で正則であることに注意．また，

$$F\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{2};1-s(\xi)\right)=s^{\frac{1}{2}}(\xi)F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};1-s(\xi)\right)$$

を用いた．よって，

$$
\begin{aligned}
s^{-1/2}(\xi)F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};s(\xi)\right) &= \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}(1-s(\xi))^{-1/2}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};1-s(\xi)\right) \\
&\quad + s^{-1/2}(\xi)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{3}{2};1-s(\xi)\right) \\
\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{x}s^{-1/2}(\xi)F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};s(\xi)\right) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{x}(1-s(\xi))^{-1/2}\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};1-s(\xi)\right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{x}s^{-1/2}(\xi)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{3}{2};1-s(\xi)\right) \\
\psi_{+,B}(x,\xi) &= \frac{i}{2}\psi_{-,B}(x,\xi) + (\xi=\xi_0\ \text{で正則な関数}\ )
\end{aligned}
$$

と表せる．これにより，$\psi_{-,B}(x,\xi)$ が $s(\xi)=1$ において 1/2 乗の特異性を持つことも明らかになった．よって

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma e^{-\eta\xi}\psi_{+,B}(x,\xi)d\xi &= \frac{i}{2}\int_\gamma e^{-\eta\xi}\psi_{-,B}(x,\xi)d\xi \\
&= \frac{i}{2}\left(\int_{\xi_0+\infty}^{\xi_0} e^{-\eta\xi e^{2i\pi}}\psi_{-,B}(x,\xi e^{2i\pi})d\xi + \int_{\xi_0}^{\xi_0+\infty} e^{-\eta\xi}\psi_{-,B}(x,\xi)d\xi\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(-\int_{\xi_0+\infty}^{\xi_0} e^{-\eta\xi}\psi_{-,B}(x,\xi)d\xi + \int_{\xi_0}^{\xi_0+\infty} e^{-\eta\xi}\psi_{-,B}(x,\xi)d\xi\right) \\
&= i\Psi_-^{(\mathrm{II})}(x,\eta)
\end{aligned}
$$

を得る．これより

$$
\Psi_+(x,\eta) \to \Psi_+(x,\eta) + i\Psi_-(x,\eta) \quad (\mathrm{I}\to\mathrm{II})
$$

を得る．

次に，領域 III から領域 I への接続を考えたい．ここで，(4) より，

$$
\begin{aligned}
\psi_\pm(x,\eta) &= e^{\pm\frac{2}{3}x^{3/2}\eta}\sum_{n=0}^{\infty} d_{\pm,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}\eta^{-n-\frac{2}{2}} \\
\psi_\pm(e^{2\pi i/3}x,\eta) &= e^{\pm\frac{2}{3}x^{3/2}e^{\pi i}\eta}\sum_{n=0}^{\infty} d_{\pm,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}e^{-n\pi i}e^{-i\pi/6}\eta^{-n-\frac{2}{2}} \\
&= e^{\mp\frac{2}{3}x^{3/2}\eta}\sum_{n=0}^{\infty} d_{\mp,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}e^{-i\pi/6}\eta^{-n-\frac{2}{2}} \\
&= e^{-i\pi/6}\psi_\mp(x,\eta)
\end{aligned}
$$

を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
\Psi_+(e^{2\pi i/3}x,\eta) &\to \Psi_+(e^{2\pi i/3}x,\eta) + i\Psi_-(e^{2\pi i/3}x,\eta) \quad (\mathrm{I}\to\mathrm{II}) \\
e^{-i\pi/6}\Psi_-(x,\eta) &\to e^{-i\pi/6}\Psi_-(e^{2\pi i/3}x,\eta) + ie^{-i\pi/6}\Psi_+(e^{2\pi i/3}x,\eta) \quad (\mathrm{III}\to\mathrm{I}) \\
\Psi_-(x,\eta) &\to \Psi_-(e^{2\pi i/3}x,\eta) + i\Psi_+(e^{2\pi i/3}x,\eta) \quad (\mathrm{III}\to\mathrm{I})
\end{aligned}
$$

を得る．また，領域 II から III へは，

$$
\begin{aligned}
\psi_\pm(e^{-2\pi i/3}x,\eta) &= e^{\pm\frac{2}{3}x^{3/2}e^{\pi i}\eta}\sum_{n=0}^{\infty} d_{\pm,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}e^{n\pi i}e^{i\pi/6}\eta^{-n-\frac{2}{2}} \\
&= e^{\mp\frac{2}{3}x^{3/2}\eta}\sum_{n=0}^{\infty} d_{\mp,n}x^{-\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}}e^{i\pi/6}\eta^{-n-\frac{2}{2}} \\
&= e^{i\pi/6}\psi_\mp(x,\eta)
\end{aligned}
$$

を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
\Psi_+(e^{-2\pi i/3}x,\eta) &\to \Psi_+(e^{-2\pi i/3}x,\eta) + i\Psi_-(e^{-2\pi i/3}x,\eta) \quad (\mathrm{I}\to\mathrm{II}) \\
e^{i\pi/6}\Psi_-(x,\eta) &\to e^{i\pi/6}\Psi_-(e^{2\pi i/3}x,\eta) + ie^{i\pi/6}\Psi_+(e^{2\pi i/3}x,\eta) \quad (\mathrm{II}\to\mathrm{III}) \\
\Psi_-(x,\eta) &\to \Psi_-(e^{2\pi i/3}x,\eta) + i\Psi_+(e^{2\pi i/3}x,\eta) \quad (\mathrm{II}\to\mathrm{III})
\end{aligned}
$$

と得ることができる．

まとめると，Stokes 現象は

$$
\begin{aligned}
\psi_+(x,\eta) &\to \psi_+(x,\eta) + i\psi_-(x,\eta) \quad (\mathrm{I}\to\mathrm{II}) \\
\psi_-(x,\eta) &\to \psi_-(x,\eta) + i\psi_+(x,\eta) \quad (\mathrm{III}\to\mathrm{I}) \\
\psi_-(x,\eta) &\to \psi_-(x,\eta) + i\psi_+(x,\eta) \quad (\mathrm{II}\to\mathrm{III})
\end{aligned}
$$

となる．

A. ガンマ関数

Definition A.1: Gamma 関数

自然数 n に対して，ガンマ関数は

$$\Gamma(n) := (n-1)!$$

と定義される．より一般に，$\mathrm{Re}\, z > 0$ となる複素数 z に対して

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

と定義される．

Info:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \\
&= \int_0^\infty 2e^{-s^2}ds \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Definition A.2: Pochhammer 記号

ポッホハマー記号は

$$(x)_n := \prod_{j=0}^{n-1}(x+j) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

と定義される．

Theorem A.3: Gamma 関数の相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

B. ガウスの超幾何関数

Definition B.1: ガウスの超幾何級数

$|z| < 1$ に対して，ガウスの超幾何級数は次のように定義される．

$$F(a,b;c;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

Definition B.2: ガウスの超幾何関数

ガウスの超幾何級数を解析接続したものを，ガウスの超幾何関数と呼ぶ．その積分表示は

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt$$

と表される，

Theorem B.3: 超幾何関数の性質

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) = &\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z) \\ &+ \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b;a+b-c+1;1-z) \end{aligned}$$

References

[1] 小池達也．1 次元シュレーディンガー方程式の完全 wkb 解析: 基礎理論と最近の発展について (準古典解析における諸問題)．**数理解析研究所講究録**, 1763:1–30, 2011.